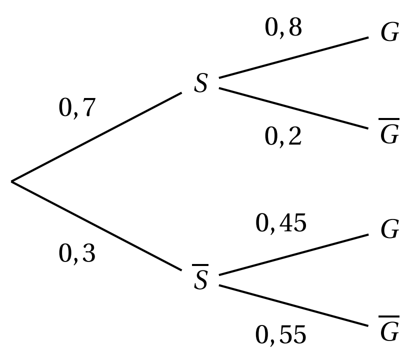
Dans cet exercice, tous les résultats seront arrondis à 10^{-3} *près en cas de besoin.*
Les deux parties de cet exercice sont indépendantes l'une de l'autre.

Partie A

Au tennis, le joueur qui est au service peut, en cas d'échec lors du premier service, servir une deuxième balle.
En match, Abel réussit son premier service dans 70 % des cas. Lorsque le premier service est réussi, il gagne le point dans 80 % des cas.
En revanche, après un échec à son premier service, Abel gagne le point dans 45 % des cas.
Abel est au service.
On considère les évènements suivants :

- S : « Abel réussit son premier service » ;
- G : « Abel gagne le point ».

1. $S \cap G$ est l'événement : « Abel réussit son premier service et gagne le point. ».
   On traduit la situation par un arbre pondéré.



2. $P(S \cap G) = P(S) \times P_S(G) = 0,7 \times 0,8 = 0,56$
3. $\left\{S, \overline{S}\right\}$ forme une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales, on a : $P(G) = P(S \cap G) + P\left(\overline{S} \cap G\right) = 0,56 + 0,3 \times 0,45 = 0,695$
4. Abel a gagné le point. La probabilité qu'il ait réussi son premier service est :
   $P_G(S) = \dfrac{P(S \cap G)}{P(G)} = \dfrac{0,56}{0,695} \approx 0,806$
5. On a :
   - $P(S \cap G) = 0,56$
   - $P(S) \times P(G) = 0,7 \times 0,695 = 0,4865$

   $P(S \cap G) \neq P(S) \times P(G)$ donc les événements S et G ne sont pas indépendants.

Partie B

À la sortie d'une usine de fabrication de balles de tennis, une balle est jugée conforme dans 85 % des cas.

1. On teste successivement 20 balles. On considère que le nombre de balles est suffisamment grand pour assimiler ces tests à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de balles conformes parmi les 20 testées.

a. L'épreuve élémentaire consiste à voir si une balle est conforme, avec une probabilité de $0,85$, ou si elle ne l'est pas.

On exécute cette épreuve élémentaire 20 fois et on considère que le nombre de balles est suffisamment grand pour assimiler ces tests à un tirage avec remise.

Donc la variable aléatoire X qui compte le nombre de balles conformes parmi les 20 testées, suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,85$.

b. À la calculatrice, $P(X \leqslant 18) \approx 0,824$.

c. La probabilité qu'au moins deux balles ne soient pas conformes parmi les 20 balles testées est égale à la probabilité qu'au plus 18 balles soient conformes, c'est-à-dire $P(X \leqslant 18)$ soit environ $0,824$.

d. L'espérance de X est $E(X) = np = 20 \times 0,85 = 17$.

2. On teste maintenant n balles successivement. On considère les n tests comme un échantillon de n variables aléatoires X indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $0,85$.

On considère la variable aléatoire $M_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n} = \frac{X_1}{n} + \frac{X_2}{n} + \frac{X_3}{n} + \ldots + \frac{X_n}{n}$

a. D'après le cours, on peut dire que les n variables aléatoires X indépendantes qui suivent la loi de Bernoulli de paramètre $p = 0,85$ ont pour espérance $p = 0,85$ et pour variance $p\left(1 - p\right) = 0,85 \times 0,15 = 0,1275$.

Soit S_n la loi somme définie par $S_n = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

- D'après la linéarité de l'espérance, on a :
  $E(S_n) = E\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} 0,85 = 0,85n$
- Les variables X_i étant indépendantes, on utilise l'additivité de la variance :
  $V(S_n) = V\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} 0,1275 = 0,1275n$

M_n est la loi moyenne définie par $M_n = \dfrac{S_n}{n}$.

- On sait que $E(aX) = aE(X)$, donc :
  $E(M_n) = E\left(\dfrac{1}{n}S_n\right) = \dfrac{1}{n}\,E(S_n) = \dfrac{0,85n}{n} = 0,85$.
- On sait que $V(aX) = a^2V(X)$ donc :
  $V(M_n) = V\left(\dfrac{1}{n}S_n\right) = \dfrac{1}{n^2}\,V(S_n) = \dfrac{0,1275n}{n^2} = \dfrac{0,1275}{n}$.

b. Si X est une variable aléatoire et t un réel strictement positif, on a :

$P\left(\left|X - E(X)\right| \geqslant t\right) \leqslant \dfrac{V(X)}{t^2}$. C'est l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

On en déduit que : $P\left(\left|X - E(X)\right| < t\right) \geqslant 1 - \dfrac{V(X)}{t^2}$. Donc :

$$P\left(\left|X-E(X)\right|<t\right)\geqslant 1-\frac{V(X)}{t^2} \iff P\left(\left|M_n-E(M_n)\right|<t\right)\geqslant 1-\frac{V(M_n)}{t^2}$$
$$\iff P\left(\left|M_n-0,85\right|<t\right)\geqslant 1-\frac{0,1275}{nt^2}$$

On prend $t=0,1$. On a donc :

- $\left|M_n-0,85\right|<t \iff \left|M_n-0,85\right|<0,1 \iff -0,1<M_n-0,85<0,1$
$\iff 0,75<M_n<0,95$
- $1-\dfrac{0,1275}{nt^2}=1-\dfrac{0,1275}{n\times 0,1^2}=1-\dfrac{12,75}{n}$

On déduit donc : $P(0,75<M_n<0,95)\geqslant 1-\dfrac{12,75}{n}$.

c. Pour trouver un entier n tel que la moyenne du nombre de balles conformes pour un échantillon de taille n appartienne à l'intervalle $]0,75\,;0,95\,[$ avec une probabilité supérieure à $0,9$, il suffit que : $1-\dfrac{12,75}{n}\geqslant 0,9$.
On résout cette inéquation.
$1-\dfrac{12,75}{n}\geqslant 0,9 \iff 0,1\geqslant\dfrac{12,75}{n} \iff 0,1n\geqslant 12,75 \iff n\geqslant 127,5$
Donc il faut un échantillon de taille supérieure à $n=128$ pour que la moyenne du nombre de balles conformes appartenant à l'intervalle $]0,75\,;\,0,95[$ ait une probabilité supérieure à $0,9$